

Teoria do Risco

Aula 18

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br



<https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>

➤ Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida pelo curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES, M.D. **Processo para sinistros agregados**. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Curso de Ciências Atuariais, Alfenas, 2026. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>. Acessado em: 28 jun. 2026.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- Outra propriedade importante do processo de Poisson Homogêneo decorre do fato de sua intensidade ser constante no tempo, e isso faz com que o tempo entre sinistros obedeça.
- Considere a probabilidade de que não ocorra sinistros dentro de um intervalo t :

$$P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0 e^{-\lambda t}}{0!} = e^{-\lambda t}$$

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- Ao se definir N_t e N_{t+s} como a frequência de sinistros ocorridos até os instantes t e $t + s$, tem-se:

$$P(N_{t+s} - N_t = 0) = P(N_s = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!}$$

- Esse resultado pode ser entendido como a probabilidade de espera entre um sinistro e outro (evento), neste caso, pode-se dizer que o tempo necessário para ocorrer um sinistro é maior que s .

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- Ao se definir uma variável aleatória T como o intervalo de tempo entre dois sinistros, tem-se:

$$P(T > s) = P(N_s = 0) = P(N_{t+s} - N_t = 0) = \frac{(\lambda s)^0 e^{-\lambda s}}{0!} = e^{-\lambda s}$$

$$P(T > s) = e^{-\lambda s}$$

- A probabilidade de que o tempo entre dois sinistros seja menor que um intervalo s , implica que o número de sinistros ocorridos nesse intervalo é maior que 0.

$$P(T < s) = P(N_s > 0) = 1 - e^{-\lambda s}$$

Portanto $T \sim \text{Exp}(\lambda)$, $t > 0$ e $\lambda > 0$.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

➤ Portanto, ao se definir $\{N_t, t \geq 0\}$ como um processo de Poisson homogêneo com intensidade λ , é estabelecido que o tempo entre dois sinistros, T , possui distribuição exponencial com parâmetro λ , logo:

$F_T(t) = 1 - e^{-t\lambda}$ Distribuição acumulada de T .

$\bar{F}_T(t) = e^{-t\lambda}$ Função de sobrevivência de T (Excesso de Danos).

$f_T(t) = \lambda e^{-t\lambda}$ Função densidade de T .

$E(T) = \frac{1}{\lambda}$ Valor esperado de T .

$var(T) = \frac{1}{\lambda^2}$ Variância de T .

$M_T(r) = \frac{\lambda}{\lambda - r}$ Função geradora de momentos de T .

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- I) A probabilidade do tempo de espera entre dois sinistros decai exponencialmente com o passar do tempo.

$$T \sim \text{Exp}(\lambda)$$

- II) A variável aleatória que representa a soma de durações exponencialmente distribuídas (idênticas), $K_j = \sum_{i=1}^j T_i$, apresenta distribuição gama com parâmetros j e λ , ou seja o instante exato do j *ésimo* sinistro

$$K_j \sim \text{Gamma}(j, \lambda)$$

- III) Dado que exatamente n sinistros ocorrem no intervalo $[0, t]$, ou seja, $N_t = n$, os tempos específicos de ocorrência desses sinistros (os K_j) são uniformemente distribuídos em $[0, t]$. Quando colocamos esses pontos em ordem crescente, obtemos os tempos de ocorrência, isso é conhecido como processo de ordem.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

- IV) A probabilidade de que seja necessário esperar mais s até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes de t , é a mesma de que esse evento ocorra depois dos s iniciais.

$$P(T > t + s | T > t) = P(T > s)$$

*Propriedade da perda de memória: Dentre as distribuições contínuas, a exponencial é a única a possuir tal propriedade.

O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

Considere uma carteira em que a frequência histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 2 sinistros por ano, ou seja $\lambda = 2$.

1) Tempo entre sinistros (T)

Isso implica em $T \sim \text{Exp}(2)$, logo o tempo médio entre sinistros é de 0,5 anos

2) Tempo Absoluto de ocorrência de sinistros (K_j)

Implica em $K_j \sim \text{Gamma}(j, 2)$, sendo assim, para o 1º sinistro $K_1 \sim \text{Gamma}(1, 2)$, para o 2º $K_2 \sim \text{Gamma}(2, 2)$ pois a soma o segundo sinistro acontece após a soma de dois tempos exponenciais.

3) Processo de ordem

Suponha que sabemos que em um período de 5 anos ocorreram exatamente 3 sinistros, ou seja $N_5 = 3$. Os tempos específicos em que esses sinistros ocorreram seguem uma distribuição Uniforme em $[0, 5]$.

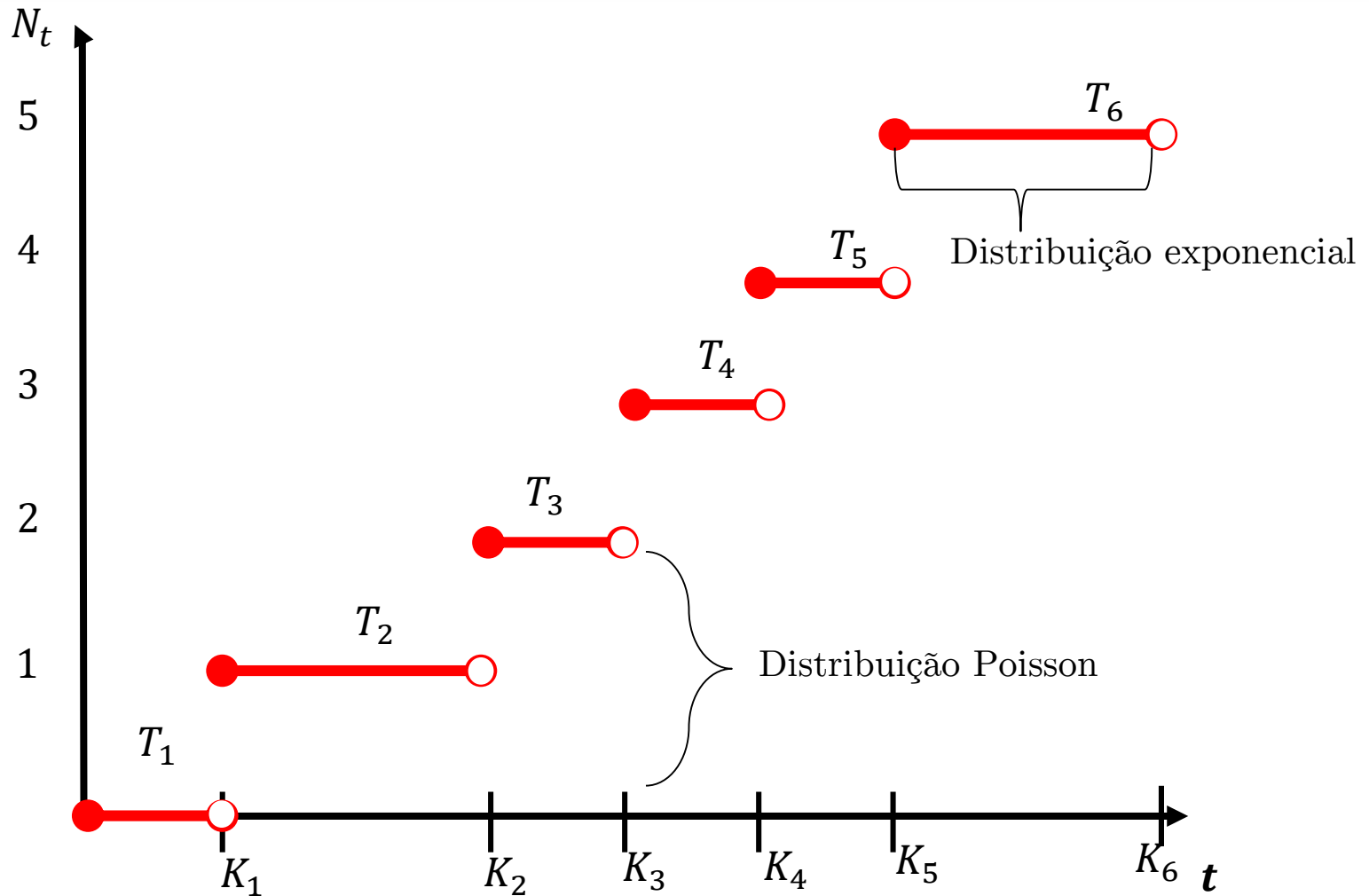
Antes da ordenação, os três pontos são independentes e uniformes em $(0,5)$.

4) Perda de memória

A probabilidade de que seja necessário esperar mais 4 meses até que o evento aconteça, dado que esse evento não aconteceu antes de 8 meses, é dada por:

$$P\left(T > \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \mid T > \frac{2}{3}\right) = P\left(T > \frac{1}{3}\right)$$

Processo de Contagem



- Para todo $i \geq 1$, K_i é o instante da i - ésima indenização.
- $T_1 = K_1$, $T_2 = K_2 - K_1$, $T_n = K_n - K_{n-1}$ tempo entre as indenizações (iid.)
- Função média de um processo pontual $\Lambda(t) = E(N_t) = \lambda t$.

EXEMPLO 1: Denote por T o tempo decorrido entre $k - 1$ *ésimo* sinistro e do k *ésimo* sinistro de uma carteira de seguros. Suponha que o tempo decorrido entre sinistros independentes e identicamente distribuídos tem a seguinte função densidade de probabilidade

$$f_T(t) = 0,04861e^{-0,04861t}, t > 0.$$

Em que t é mensurado em lapsos de meia hora. Sendo assim calcule a probabilidade de que pelo menos um sinistro será processado nas próximas duas horas e trinta minutos.

SOLUÇÃO:

Uma vez que a distribuição do tempo decorrido entre dois sinistros é uma exponencial, logo:

$$\lambda = 0,04861.$$

Como a função densidade de probabilidade está descrita em duas horas e trinta minutos, então deve-se calcular a probabilidade considerando essa ordem de medida. Dessa forma:

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - P(N_5 = 0)$$

$$P(N_5 \geq 1) = 1 - e^{-0,04861 \times 5} = 1 - e^{-0,24305} \approx 0,2157 \approx 21,57\%$$

EXEMPLO 2: Considere uma carteira em que a taxa histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

- a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.
- b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

EXEMPLO 2: Considere uma carteira em que a taxa histórica relativa de ocorrência anual de sinistros é de 5 sinistros por ano.

a) Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

$$\overline{F}_T\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0,036$$

EXEMPLO 2: Calcule a probabilidade de que o tempo de espera entre dois sinistros consecutivos seja maior que 8 meses.

$$\overline{F}_T\left(\frac{2}{3}\right) = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0,036$$

b) Calcule a probabilidade do intervalo entre dois sinistros ser superior a 10 meses, sabendo-se que nos 2 primeiros meses não ocorreram sinistros.

$$10 \text{ meses} = \frac{5}{6} \text{ anos e } 2 \text{ meses} = \frac{1}{6} \text{ anos.}$$

$$P\left(T > \frac{5}{6} \middle| T > \frac{1}{6}\right) = \frac{e^{-5\left(\frac{5}{6}\right)}}{e^{-5\left(\frac{1}{6}\right)}} = e^{-5\left(\frac{2}{3}\right)} = 0,036 = \overline{F}_T\left(\frac{2}{3}\right)$$

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- A generalização do processo de Poisson é chamada de processo de renovação.
- Se os tempos entre as falhas $T_1, T_2, \dots$ são *iid*, então diz-se que o processo é de renovação,
 - ...não necessariamente a distribuição de T_i precisa ser exponencial.

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

- Os processos não homogêneos também apresentam muitas aplicações na análise de risco (são processos mais gerais).
- Processos não Homogêneos (função intensidade não é constante)
 - Acarretando uma não estacionaridade e/ou
 - não independência nos incrementos.
 - ...Processo misto (intensidade definida por uma variável aleatória)

O processo de Poisson para frequência de Sinistros

Processo de Poisson misto de Pólya,

$$\Lambda \sim \text{Gama}(\alpha, r)$$

$$P(N_t = n) = \binom{n + \alpha - 1}{n} \left(\frac{t}{t + r} \right)^n \left(\frac{r}{t + r} \right)^\alpha$$

- “...não obedece ao critério de independência nos incrementos, de modo que não deveria ser classificado como um processo de Poisson (contagem).”

Processo estocástico de sinistros agregados

$$S_{ind.t} = X_{1.t} + X_{2.t} + X_{3.t} + \cdots + X_{n.t}$$

$$S_{Col.t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

$\{N_t, t \geq 0\}$: Processo de contagem (**Processo de Poisson**)

$\{S_{Col.t}, t \geq 0\}$: Processo estocástico de sinistros agregados

X_i : Representa a severidade do i — *ésimo* sinistro.

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Definindo-se $S_{col.t}$ como a severidade acumulada no intervalo de tempo t de acordo como o modelo de risco agregado.

$$S_{col.t} = S_t$$

- O processo estocástico $\{S_t, t > 0\}$ é dito ser um processo de **Poisson composto homogêneo** se podemos representá-lo da seguinte forma:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

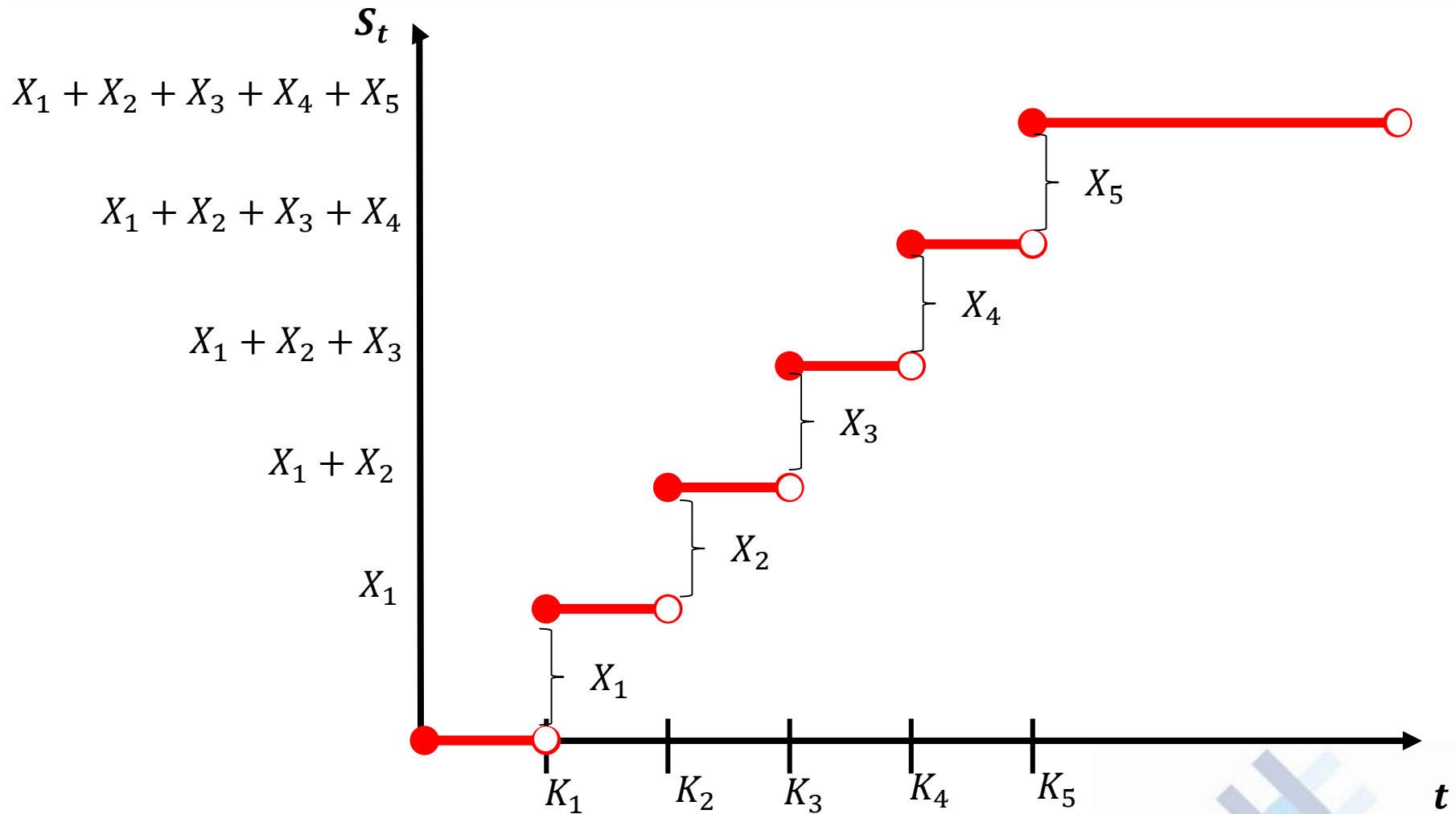
Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

$\{N_t, t > 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo.

$\{X_i, i > 0\}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e independentes de $\{N_t, t > 0\}$.

$$S_t = 0 \text{ se } N_t = 0$$

Processo de Contagem



➤ Para todo $i \geq 1$, K_i é o instante do i – *ésimo* sinistro

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

A função distribuição convoluta de S_t é será dada por:

$$F_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} F^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

em que $F^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k < s)$

Consequentemente temos que:

$$P_{S_t}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{*k}(s) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

em que $P^{*k}(s) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k = s)$

Processo de Poisson para modelagem de Sinistros agregados

- Sua esperança e variância são dadas por:

$$E(S_t) = \lambda t E(X)$$

$$\text{var}(S_t) = \lambda t E(X^2)$$

- Esperança matemática e variância do montante agregado de sinistros para o intervalo de tempo t de um processo estocástico Poisson Homogêneo.

$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t [M_X(r) - 1]}$$

* $M_{S_t}(r)$ existe se $M_X(r)$ existe.

EXEMPLO 3: Considere uma carteira de n apólices idênticas de seguros de danos em que a frequência histórica relativa de ocorrência de sinistros é de 5 sinistros por ano. Considere que a distribuição das severidades tem um comportamento descrito pela distribuição Gama com parâmetros $\alpha = 100$ e $\beta = 2$, $X \sim Gama(100, 2)$. Supondo que este comportamento se mantenha constante no período de análise e que todas as apólices são renovadas a cada ano. Obtenha a fórmula genérica da função geradora de momentos, esperança matemática e do desvio padrão da distribuição convoluta de sinistros agregados.

■ Resp.:

$$M_X(r) = \left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^\alpha \quad E(X) = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{var}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

Logo,

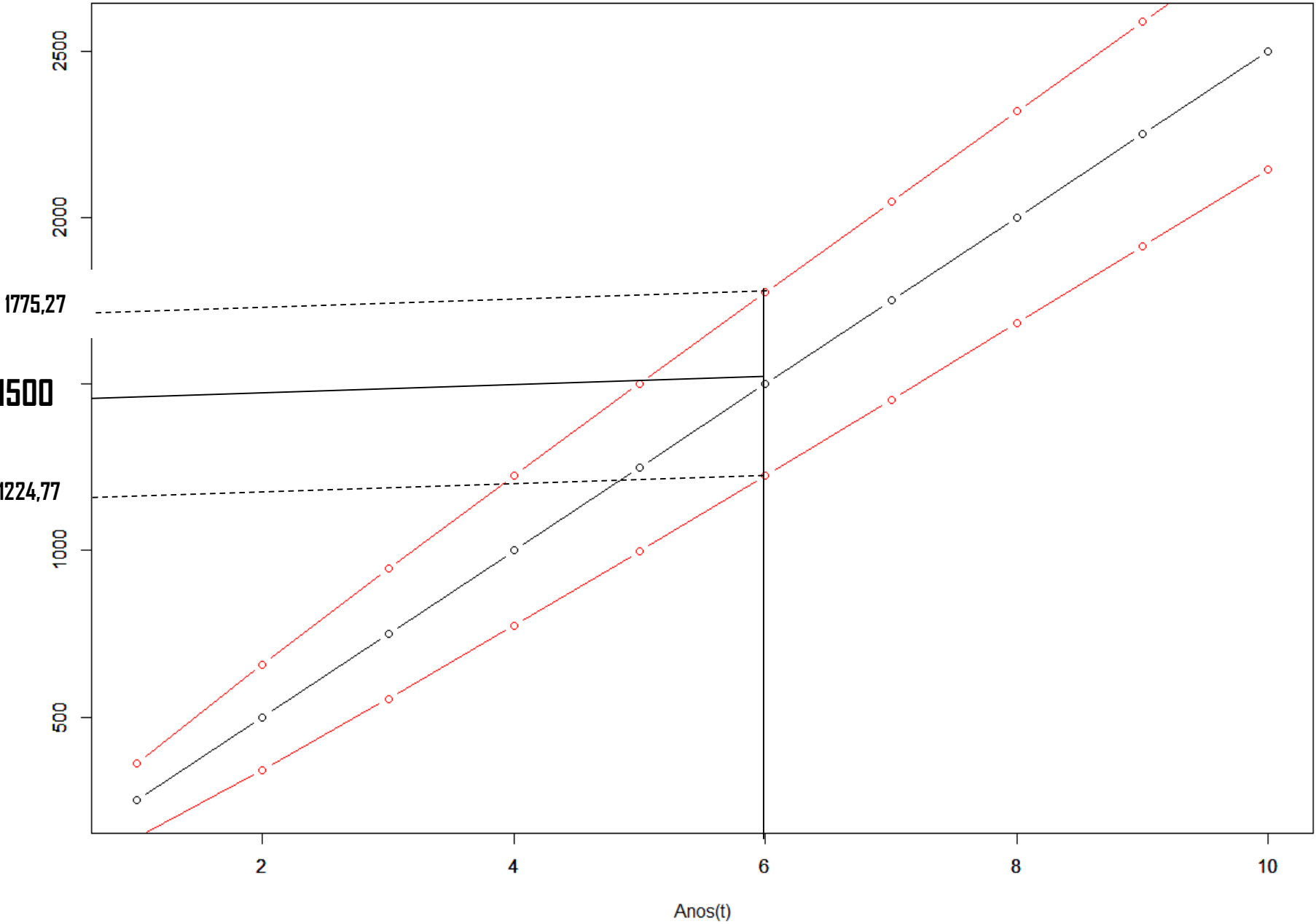
$$M_{S_t}(r) = e^{\lambda t \left[\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^\alpha - 1 \right]} = e^{5t \left[\left(\frac{2}{2-r}\right)^{100} - 1 \right]}$$

$$E(S_t) = \frac{\alpha}{\beta} (\lambda t) = 5t \left(\frac{100}{2} \right) = 250t$$

$$\text{var}(S_t) = \lambda t \left(\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) = 5t(25 + 50^2) = 12625t$$

$$\sigma_{S_t} = 112,361\sqrt{t}$$

$E(S_t)$



O processo de Poisson Homogêneo para frequência de Sinistros

Sinistros ocorrem e são pagos imediatamente conforme um processo de Poisson com intensidade λ . A severidade dos sinistros é constante no valor de b . K_n denota o instante em que ocorre o n ésimo sinistro medido a partir do instante zero. Definindo-se o valor presente dos pagamentos futuros de sinistros até o momento t com taxa de juros igual a δ como:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} b$$

Calcule $E(S_t)$.

$$\begin{aligned}
 E(S_t) &= E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} b \right] = b E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \right] = \\
 &= b E \left\{ E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \mid N_t = n \right] \right\} = b \sum_{n=0}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \mid N_t = n \right] P(N_t = n) = \\
 &= b \sum_{n=0}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \mid N_t = n \right] \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} =
 \end{aligned}$$

Obs.:

$$E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \mid N_t = n \right] = E \left(\sum_{i=1}^n e^{-\delta K_i} \right) = \sum_{i=1}^n E(e^{-\delta K_i}) =$$

Obs.:

$$E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \mid N_t = n \right] = E \left(\sum_{i=1}^n e^{-\delta K_i} \right) = \sum_{i=1}^n E(e^{-\delta K_i}) =$$

Como os tempos dos sinistros $K_1, K_2, \dots, k_n$ são equivalentes a os n pontos de uma amostra ordenada de uma distribuição uniforme $U(0, t)$. Assim:

$$E(e^{-\delta K}) = \int_0^t \frac{e^{-\delta k}}{t} dk = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta t}$$

Portanto

$$E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \mid N_t = n \right] = n \left(\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta t} \right)$$

Logo....

$$E(S_t) = E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} b \right] = b E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \right] =$$

$$= b \sum_{n=0}^{\infty} E \left[\sum_{i=1}^{N_t} e^{-\delta K_i} \mid N_t = n \right] \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} = b \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta t} \right) \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$$

$$= b \left(\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta t} \right) \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} = b \left(\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta t} \right) \lambda t$$

$$E(S_t) = \frac{b\lambda}{\delta} (1 - e^{-\delta t})$$

O prêmio para essa carteira será maior quanto maiores forem λ e b e tanto menor quanto δ . E para $t \rightarrow \infty$, temos $E(S_t) = \frac{b\lambda}{\delta}$

Bibliografia

- FERREIRA, P. P. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 2002.
- CENTENO, M. L. **Teoria do risco na actividade seguradora**. Oeiras: Celta, 2003.
- PACHECO, R. **Matemática Atuarial de Seguros de Danos**. Editora Atlas, 2014.
- RODRIGUES, J. A. **Gestão de risco atuarial**. São Paulo: Saraiva, 2008.
- PIRES, M.D.; COSTA, L.H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba: CRV 2020.

